Apuntes de Clase de Computación: Matemáticas Discretas

D. Acosta, M. Castro

9 de enero de 2006

Índice

1. Introducción

Los apuntes tienen el propósito de servir de material de apoyo para las sesiones de práctica del curso CI2523 Matemáticas Discretas III. Las soluciones a los problemas aparecen en detalle con el objeto que el lector se familiarice tanto con las técnicas como las manipulaciones necesarias para elaborarlas. Se ha hecho especial esfuerzo en citar la fuente original de problemas y soluciones para motivar el uso por parte de los estudiantes de los libros de referencia para el curso. La mayor parte de los problemas que se presentan provienen de los problemas no resueltos de la guía del curso CI2523 Matemáticas Discretas III [1] y es el resultado de los cursos dictados por los autores durante los períodos entre Septiembre del 2002 y Julio del 2004. El orden de la secciones refleja la secuencia que se sigue en dicho curso.

Finalmente agradezco las contribuciones hechas a este material por parte del Prof. Blai Bonet y la Br. Angela Brando.

2. Principios e Indentidades de Conteo I

1. Se dispone de 5 libros distintos de computación, 4 libros distintos de matemáticas y 2 libros distintos de literatura. De cuantas formas distintas pueden disponerse todos los libros en un estante si:

   a) no hay restricciones?

   $$(5+4+2)! = 11!$$

   b) todos los libros de computación deben ir a la derecha y los de literatura a la izquierda?

   - Colocar los libros de computación a la derecha 5!
   - Colocar los libros de literatura a la izquierda 2!
   - Colocar Colocar los libros de matemáticas 4!

   Por Pricipio Fundamental

   $$5!2!4!$$

   c) todos los libros de matemáticas deben ir a la izquierda?

   $$4!(5+2)!$$

   d) todos los libros de la misma disciplina deben ir juntos?

   $$5!4!2!3!$$

   e) los libros de literatura no pueden estar juntos?

   $$9!\binom{10}{1}\binom{9}{1}$$

2. De cuantas maneras diferentes puede contestarse un examen de n preguntas de escogencia múltiple si cada pregunta tiene m posibles y pueden dejarse preguntas en blanco?

   $$(m+1)^n$$

3. De cuantas formas distintas pueden seleccionarse tres grupos de dos personas de un grupo de seis personas?

   $$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!}$$

4. En un grupo de cuatro hombres y seis mujeres, cada hombre se casa con una de las mujeres. De cuantas maneras puede ocurrir esto?

   $$6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 6^{\underline{4}}$$

5. El sistema de representación de caracteres Braille consiste de hasta seis puntos en un arreglo de tres fila por dos columnas. Cada caracter tiene al menos un punto. Cuántos caracteres diferentes pueden representarse en el sistema Braille?

   $$2^6 - 1$$

6. Cuántos subconjuntos de [10] contienen por lo menos un entero impar?

$$2^{10} - 2^5$$

7. Cuántas palabras hechas con todas las letras ABCDEF contienen:

   a) la sub-palabra BAD?

   $$4!$$

   b) las letras A, B y C juntas?

   $$4!3!$$

   c) la letra A aparece antes de la letra C y la C antes de la F?

      1) Escojer tres lugares, disponer A, C y F de la única forma posible, permutar las tres letras restantes en las tres posiciones restantes. Entonces

      $$\binom{6}{3}3!$$

      2) Disponer A, C y F de la única forma posible, disponer las tres letras restantes en los cuatro lugares disponibles. Entonces

      $$4^{\underline{3}}$$

8. Se desea colorear vértices distinguibles de un péntagono regular con q colores. De cuantas formas diferentes se puede lograr esto si se quiere que vértices adyacentes tengan distinto color?

   Se tienen cinco vértices, enumerarlos en sentido horario del 1 al 5. Entonces encontramos dos casos:

   Vértices 1 y 4 tiene el mismo color Vértices 1 y 4 tienen el mismo color de q posbilidades. posiblidades. Vértice 5 un color de $q-1$ posibilidades. Vértice 2 un color de $q-1$ posibilidades y vértice 3 un color de $q-2$ posibilidades. Total: $q(q-1)(q-1)(q-2)$.

   Vértices 1 y 4 tienen distinto color Vértice 1 un color de q posbilidades. Vértice 4 un color de $q-1$ posibilidades. Vértice 5 un color de $q-2$ posibilidades. Luego tenemos dos posibilidades:

   Vértices 2 y 4 tiene el mismo color Vértice 2 de color igual a vértice 4 y vértice 3 un color de $q-2$ posibilidades. Total: $q(q-1)(q-2)\cdot 1\cdot(q-2)$.

   Vértices 2 y 4 tienen distinto color vértice 2 un color de entre $q-2$ y 3 un color de entre $q-2$ posibilidades. Total: $q(q-1)(q-2)(q-2)(q-2)$.

   Por Principio de Adición el número total de formas de colorear los cinco vértices con q colores es:

   $$q(q-1)(q-2)^2 + \left[q(q-1)^2(q-2) + q(q-1)(q-2)^3\right]$$

9. Cuántas n-palabras del albabeto $\Lambda = \{0,1\}$ tiene exactamente k ceros y los ceros no son consecutivos?

$$\binom{n-k+1}{k}$$

10. Cuántas cadenas de ocho bits contienen al menos dos ceros consecutivos?

Contar por complemento: primero todas las posibles cadenas de 8 bits y luego todas las cadenas que no contienen ceros consecutivos y restar.

$$2^8 - \left(1 + \binom{8}{1} + \binom{7}{2} + \binom{6}{3} + \binom{5}{4}\right)$$

11. Se tiene veinte fusibles de los cuales hay cuatro defectuosos, de cuántas maneras se pueden seleccionar:

a) cuatro no defectuosos?

$$\binom{16}{4}$$

b) cinco de los cuales exactamente dos sean defectuosos?

$$\binom{16}{3}\binom{4}{2}$$

c) cuatro que contengan al menos uno defectuoso?

$$\binom{20}{4} - \binom{16}{4}$$

12. De cuantas formas se pueden ordenar linealmente las letras de la palabra AABBBBCC?

$$\frac{8!}{2!4!2!}$$

13. En el plano $N \times N$ cuántos caminos hay de $(0, 0)$ a (m, n) si en cada paso se debe subir una unidad o avanzar hacia la derecha una unidad?

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$$

3. Principios e Indentidades de Conteo II

1. Cuántas formas hay de repartir n monedas iguales entre m personas, si cada persona debe recibir por lo menos una moneda?

$$C_m(n)$$

2. Se desean colocar k bolas en n cajas. De cuántas formas diferentes puede hacerse si:

a) Las bolas están etiquetadas y las cajas son indistinguibles.

Las bolas definen un conjunto (distinguibles) y las cajas las posibles particiones de ese conjunto (indistinguibles). Puedo colocar las k bolas en una caja, luego las k bolas en dos cajas y así sucesivamente. Entonces:

$$S_1(k) + S_2(k) + S_3(k) + \cdots + S_n(k) = \sum_{i=1}^{n} S_i(k)$$

b) Las bolas son distinguibles y las cajas son indistinguibles, pero no se permiten cajas vacías.

Se distribuyen las bolas en n partes asegurando que no hay cajas vacías, entonces:

$$S_n(k)$$

c) Las bolas están etiquetadas y las cajas son indistinguibles y cada caja debe tener máximo una bola.

Hay que asegurarse de colocar una o cero bola en cada caja. Esto es igual a verificar que en número de bolas sea menor o igual que el número de cajas. Si $k \leq n$ y dado que las cajas son indistinguibles entonces hay una sola manera de hacerlo.

$$1[k \leq n]$$

d) Las bolas son indistinguibles y las cajas distinguibles.

Mapear al problema de puntos y rayas con las bolas como puntos y las rayas como cajas, entonces:

$$d_n(k)$$

e) Las bolas son indistinguibles y las cajas distinguibles y cada caja debe tener máximo una bola.

$$\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \binom{n}{k}$$

f) Las bolas son indistinguibles y las cajas distinguibles y cada caja debe tener al menos una bola.

$$C_n(d)$$

g) Las bolas y las cajas son distinguibles.

$$n^k$$

h) Las bolas y las cajas son distinguibles pero se coloca máximo una bola por caja.

$$n^{\underline{k}}$$

i) Las bolas y las cajas son distinguibles pero al menos hay una bola en cada caja.

Si se consideran las cajas indistinguibles, entonces $S_n(k)$. Finalmente se hacen las cajas distinguibles como sigue

$$n!S_n(k)$$

3. Se tiene m tarjetas blancas, n tarjetas azules y p sobres. Se quiere saber de cuántas maneras se pueden colocar las tarjetas en los sobre si:

   a) Las tarjetas del mismo color son indistinguibles, los sobres son distinguibles y cada sobre debe tener a lo sumo una tarjeta blanca.

   - Colocar las tarjetas blancas $\binom{p}{m}$.
   - Colocar las tarjetas azules $d_p(n)$

Por Principio Fundamental

$$\binom{p}{m} d_p(n)$$

b) Todas las tarjetas y los sobres son diferentes, las blancas deben estar ordenadas y debe haber por lo menos una azul en cada sobre.

- Colocar las tarjetas blancas. Dado que son distinguibles y deben estar ordenadas, se asigna un identificador a cada una, entonces para la primera tarjeta hay p sobres, para la segunda hay $p-1$ sobres más delante o detrás de la primera tarjeta, esto es $p+1$. Entonces tenemos $p(p+1)\cdots(p+m-1)$.
- Colocar las tarjetas azules. Repartir las n tarjetas en los p sobres $S_p(n)$ con sobres indistinguibles y luego hacerlos distiguibles permutándoles, entonces tenemos $p!S_p(n)$.

Por Principio Fundamental

$$p^{\overline{m}} p! S_p(n)$$

c) Sobres y tarjetas distinguibles, cada sobre debe tener por lo menos una tarjeta blanca y a lo sumo una tarjeta azul.

- Colocar tarjetas blancas $p!S_p(m)$.
- Colocar tarjetas azules. Cada vez que coloco una tarjeta en un sobre, para la próxima debo descartar ese sobre. Entonces tenemos $p^{\underline{n}}$.

Por Principio Fundamental

$$p! S_p(m) p^{\underline{n}}$$

d) Sobres indistinguibles, tarjetas distinguibles y cada sobre debe tener por lo menos una tarjeta blanca.

- Colocar las tarjetas blancas $S_p(m)$.
- Colocar las tarjetas azules p^n. Es interesante notar que esto también se puede hacer de la siguiente forma $\sum_{i=0} n \binom{p}{i} i! S_i(n) = p^n$. Esto es: escojer las posiciones, permutarlas pues son distinguibles y colocar las tarjetas azules.

Por Principio Fundamental

$$S_p(m) p^n$$

4. De cuántas maneras distintas se puede colorear un cubo de caras distinguibles si se dispone de q colores y caras adyacentes no pueden tener igual color?

   Cada cara del cubo representa un vértice de un hexágono. Colorear los vértices del hexágono con q colores bajo la premisa que vértices adyacentes con deben tener distinto color.

   Enumerando los vértices en sentido horario del uno al seis tenemos los siguientes casos:

Vértices 1 y 6 del mismo color vértices 1 y 6 un color de q. Luego

- **Vértices 2 y 5 del mismo color** coloreo 2 y 5 y luego 3 y 4 $(q-1)(q-2)^2$
- **Vértices 2 y 5 de distinto color** coloreo 2 y 5 y luego 3 y 4 $(q-1)(q-2)(q-3)^2$

$$A = q\left((q-1)(q-2)^2 + (q-1)(q-2)(q-3)^2\right)$$

Vértices 1 y 6 de distinto color $q(q-1)$ y luego

Vértices 2 y 5 del mismo color coloreo 2 y 5 yluego 3 y 4 $(q-2)(q-3)^3$

Vértices 2 y 5 de distinto color coloreo 2 y 5 y luego 3 y 4 $(q-2)(q-3)(q-4)^2$

$$B = q(q-1)\left((q-2)(q-3)^3 + (q-2)(q-3)(q-4)^2\right]$$

Finalmente el número total de maneras es

$$A + B$$

5. Dados dos conjuntos finitos A y B de n y m elementos respectivamente. Cuántas funciones de A en B pueden definirse si:

   a) No hay restricciones.

   $$m^n$$

   b) Las funciones deben ser inyectivas.

   $$m^{\underline{n}}$$

   c) Las funciones deben ser sobreyectivas.
   Paticiono el conjunto de llegada en n partes distinguibles, entonces

   $$S_m(n)m!$$

6. Pruebe que si p unos y q ceros se colocan arbritariamente en un círculo de manera arbitraria y hay por lo menos k unos por cada cero, esto es $p \geq kq$, con $p, q, k \in Z^+$, entonces el arreglo debe contener al menos k unos consecutivos.

   Coloco q ceros, luego tengo q espacios entre los ceros. Coloco entre los espacios $k-1$ unos como máximo. Como por cada cero debo tener al menos k unos, entonces por Principio del Palomar hay al menos uno de los q espacios con más de $k-1$ unos, esto es al menos k unos consecutivos.

7. Grafos y dígrafos:

   a) Cuántos grafos se pueden formar con n vértices?

   b) Cuántos de ellos no tienen bucles?

   c) Cuántos dígrafos distintos se pueden formar con n vértices?

   d) Cuántos dígrafos sin bucles se pueden formar con n vértices?

4. Sumas: Método de Perturbación

1. Halle $\sum_{k=m}^{n} ax^k$.
   Notando que

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} ax^k = a\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

entonces

$$\sum_{k=m}^{n} ax^k = \begin{cases} S_n - S_{m-1} = a\frac{x^m - x^{n+1}}{1-x} & x \neq 1 \\ a(n-m+1) & x = 1 \end{cases}$$

2. Halle la forma cerrada de $S_n = \sum_{0\leq k\leq n} k2^k$.
Aplicando el método de perturbación[2] tenemos

$$\begin{aligned} S_n + (n+1)2^{n+1} &= \sum_{0\leq k\leq n} (k+1)2^{k+1} = \sum_{0\leq k\leq n} k2^{k+1} + \sum_{0\leq k\leq n} 2^{k+1} \\ &= 2\sum_{0\leq k\leq n} k2^k + \sum_{0\leq k\leq n} (2)2^k = 2S_n + 2\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2S_n + 2^{n+2} - 2 \end{aligned}$$

Finalmente

$$S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

3. Trate de usar el método de perturbación para evaluar $S_n = \sum_{1\leq k\leq n} kH_k$ y concluya que $\sum_{1\leq k\leq n} H_k = (n+1)H_n - n$.
Empleado el método de perturbación en S_n y sea $K = [1 \ldots k]$

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + (n+1)H_{n+1} = 1 + \sum_{k\in K} (k+1)H_{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k\in K} kH_{k+1} + \sum_{k\in K} H_{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k\in K} k\left(H_k + \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k\in K}\left(H_k + \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 + \sum_{k\in K} kH_k + \sum_{k\in K}\frac{k}{k+1} + \sum_{k\in K} H_k + \sum_{k\in K}\frac{1}{k+1} \\ &= 1 + S_n + \sum_{k\in K} H_k + n \end{aligned}$$

Notese que S_n aparece a la izquierda y derecha de la igualdad. Por lo tanto se cancela. Manipulando las expresiones restantes se obtiene

$$\sum_{k\in K} H_k = (n+1)\left(H_n + \frac{1}{n+1}\right) - 1 - n = (n+1)H_n - n.$$

5. Sumas: Sumas Dobles y Coeficientes Binomiales

1. Halle $S_n = sum_{k=1}^{n} k^2$ escribiendo la suma como una doble suma. Notando que

$$k^2 = \underbrace{k + \cdots + k}_{k \text{ veces}}$$

podemos escribir los términos de la sumación como sigue

$$
\begin{aligned}
S_n = {} & \\
& 1+ \\
& 2+2+ \\
& 3+3+3+ \\
& \vdots \\
& \underbrace{n+n+\cdots+n}_{n \text{ veces}}
\end{aligned}
$$

indexando las filas del arreglo anterior en j y las columnas en k, y sumando por columnas podemos reescribirla como sigue

$$S_n = \sum_{1\le j\le n}\left(\sum_{j\le k\le n} k\right)$$

la cual se resuelve como sigue

$$
\begin{aligned}
S_n = \sum_{1\le j\le n}\sum_{j\le k\le n} k & \\
\overset{k\to k+j}{=} & \sum_{1\le j\le n}\sum_{j\le k+j\le n}(k+j) = \sum_{1\le j\le n}\sum_{0\le k\le n-j}(k+j) \\
= & \sum_{1\le j\le n}\left(\sum_{0\le k\le n-j} k + j \sum_{0\le k\le n-j} 1\right) \\
= & \sum_{1\le j\le n}\left(\frac{1}{2}(n-j)(n-j+1)+j(n-j+1)\right) \\
= & \frac{1}{2}\sum_{1\le j\le n}(n-j+1)(n-j)+2j(n-j+1) \\
= & \frac{1}{2}\sum_{1\le j\le n}(n^2+n-j^2+j) = \frac{1}{2}\left(\sum_{1\le j\le n}(n^2+n) - S_n + \sum_{1\le j\le n} j\right)
\end{aligned}
$$

Finalmente despejando S_n y manipulando obtenemos

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{3}\left((n^2+n)\sum_{1\le j\le n} 1 + \frac{1}{2}n(n+1)\right) \\
&= \frac{1}{6}\big(2n(n^2+n)+n(n+1)\big) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}
$$

2. Halle $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$ escribiendo la suma como una doble suma.

   Notando que $S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots$ entonces los términos de la suma se pueden escribir como

$$
\begin{aligned}
S_n = & \\
& 2+ \\
& 4+4+ \\
& 8+8+8+ \\
& \vdots \\
& \underbrace{2^n + 2^n + \cdots + 2^n}_{n \text{ veces}}
\end{aligned}
$$

   indexando las filas del arreglo anterior en j y las columnas en k, y sumando por columnas podemos reescribirla como sigue

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1\le j\le n}\left(\sum_{j\le k\le n} 2^k\right) \stackrel{P_1}{=} \sum_{1\le j\le n} \frac{2^j - 2^{n+1}}{1-2} \\
&= \sum_{1\le j\le n} (2^{n+1} - 2^j) = n2^{n+1} - \sum_{1\le j\le n} 2^j \stackrel{P_1}{=} n2^{n+1} - \left(\frac{2^1 - 2^{n+1}}{1-2}\right) \\
&= n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 = (n-1)2^{n+1} + 2
\end{aligned}
$$

   donde

$$
P_1 \equiv \sum_{m\le k\le n} ax^k = a\frac{x^m - x^{n+1}}{1-x}
$$

3. Cuánto vale la suma de los cuadrados de los primeros n números impares escrito como una suma doble.

   Si N es el n-ésimo numero impar

$$
\begin{aligned}
S_n = & \sum_{\substack{1\le k\le N \\ k \text{ impar}}} k^2 = \sum_{1\le k\le n} (2k-1)^2 \\
= & \sum_{1\le k\le n} (4k^2 - 4k + 1) = 4\sum_{1\le k\le n} k^2 - 2n(n+1) + n \\
= & \ 4\sum_{1\le j\le n}\sum_{j\le k\le k} k - 2n(n+1) + n \\
= & \ \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n \\
= & \ \frac{4}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

4. Halle $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 H_k$.

Sea $K = [1 \dots n]$ y aplicando el método de perturbación

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 H_{n+1} = 1 + \sum_{k\in K} (k+1)^2 H_{k+1} \\
&= 1 + \sum_{k\in K} (k+1)^2 \left(H_k + \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k\in K} (k+1)^2 H_k + (k+1) \\
&= 1 + \sum_{k\in K} (k^2 + 2k + 1) H_k + (k+1) \\
&= 1 + \sum_{k\in K} k^2 H_k + 2 \sum_{k\in K} k H_k + \sum_{k\in K} H_k + \sum_{k\in K} k + \sum_{k\in K} 1 \\
&= 1 + S_n + 2 \sum_{k\in K} k H_k + ((n+1)H_k - n) + \frac{1}{2} n(n+1) + n
\end{aligned}
$$

Como S_n aparece a ambos lados de la igualdad se cancela. Finalmente obtenemos una expresion para $\sum_{k\in K} kH_k$ como sigue

$$
\sum_{k\in K} kH_k = \frac{1}{2} n(n+1) H_n - \frac{1}{4} n(n-1)
$$

Intuitivamente se debe perturbar $\sum_{1\leq k\leq n} k^3 H_k$ para encontrar una expresión cerrada para $\sum_{1\leq k\leq n} k^2 H_k$. Entonces aplicando el método de perturbación a $S_n = \sum_{1\leq k\leq n} k^3 H_k$

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 H_{n+1} = 1 + \sum_{k\in K} (k+1)^3 H_{k+1} \\
&= 1 + \sum_{k\in K} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \left(H_k + \frac{1}{k+1} \right) \\
&= 1 + \sum_{k\in K} k^3 H_k + 3 \sum_{k\in K} k^2 H_k + 3 \sum_{k\in K} kH_k + \sum_{k\in K} H_k + \sum_{k\in K} (k+1)^2
\end{aligned}
$$

Nuevamente S_n aparace a ambos lados de la igualdad y se cancela. De la igualdad restante podemos deducir una expresión para $\sum_{1\leq k\leq n} k^2 H_k$ como sigue

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in K} k^2 H_k = \frac{1}{3} \left[(n+1)^3 H_{n+1} - 1 - 3 \sum_{k\in K} kH_k - \sum_{k\in K} H_k - \sum_{k\in K} (k+1)^2 \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[(n+1)^3 H_{n+1} - 1 - 3 \left(\frac{1}{2} n(n+1) H_n - \frac{1}{4} n(n-1) \right) \right. \\
&\quad \left. - ((n+1)H_n - n) - \left(\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - n(n+1) - n \right) \right] \\
&= \frac{1}{3} n(n+1)(n + \frac{1}{2}) H_n + \frac{1}{12} n(3n-1) - \frac{1}{18} n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}
$$

5. Hallar una fórmula cerrada para $S_n = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\binom{m}{k}k$.

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\binom{m}{k}k &= \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{k}{1} \\ &\overset{P_1}{=} \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\binom{m}{1}\binom{m-1}{k-1} \\ &\overset{P_2}{=} m\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\binom{m-1}{m-k} \\ &\overset{P_3}{=} m\binom{n+m-1}{m} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv \binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} \\ P_2 &\equiv \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \\ P_3 &\equiv \sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}\binom{p}{m-k} = \binom{n+p}{m} \end{aligned}$$

6. Halle $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{1} \overset{P_1}{=} \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\ &\overset{k\to k+1}{=} n\sum_{1\leq k+1\leq n}\binom{n-1}{(k+1)-1} = n\sum_{1\leq k\leq n}\binom{n-1}{k} \overset{P_2}{=} n2^{n-1} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv \binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} \\ P_2 &\equiv (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \text{ con } x = 1 \end{aligned}$$

Otra forma de solución es como sigue:

Dada P_2 podemos deducir que

$$\begin{aligned} n2^{n-1} &= \frac{d}{dx}(x+1)^n\bigg|_{x=1} = n(x-1)^{n-1}\big|_{x=1} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\bigg|_{x=1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d}{dx}x^k\bigg|_{x=1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}\bigg|_{x=1} = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} \end{aligned}$$

7. Obtenga una fórmula cerrada para $\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}(x+1)^n &= n(n-1)(x-1)^{n-2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^{k-2} \\
\frac{d^2}{dx^2}(x+1)^n\bigg|_{x=1} &= n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^{k-2}\bigg|_{x=1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k^2-k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2 - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$$

6. Coeficientes Binomiales y Principio de Inclusión y Exclusión

1. Halle el valor de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^{k+1}(k+1)}$.

   Notando que

$$\int (x+1)^n dx = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} = \int \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}$$

   entonces

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^{k+1}(k+1)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{n+1}$$

2. Halle el valor de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k-1}}$.

   Notando que

$$\frac{d}{dx}(x+1)^n = n(x+1)^{n-1} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

   entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k-1}} &= \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\frac{(-1)^2(-1)^{k-1}}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= n(x+1)^{n-1}\big|_{x=-\frac{1}{2}} = \frac{n}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

3. Demuestre que

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

utilizando la identidad $(x+1)^n(x+1)^n = (x+1)^{2n}$ y considerando el coeficiente de x^n a ambos lados de la igualdad.

La indentidad anterior implica que

$$\left[\sum_{k=0} n\binom{n}{k}x^k\right]\left[\sum_{k=0} n\binom{n}{k}x^k\right] = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k$$

Expandiendo las sumas

$$\begin{aligned}&\left[\binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right]\left[\binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right]\\ &= \binom{2n}{0}x^0 + \binom{2n}{1}x^1 + \cdots + \binom{2n}{n-1}x^{n-1} + \binom{2n}{n}x^n + \binom{2n}{n+1}x^{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}x^{2n}\end{aligned}$$

Observando el término x^n a ambos lados de la igualdad

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}x^0x^n + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1}x^1x^{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2}x^2x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}x^nx^0 = \binom{2n}{n}x^n$$

Aplicando la identidad $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ a cada sumando en el lado izquierdo de la igualdad

$$\binom{n}{0}\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}\binom{n}{1}x^n + \binom{n}{2}\binom{n}{2}x^n + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{n}x^n = \binom{2n}{n}x^n$$

Finalmente manipulando

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

4. Probar que el número de grafos simples sin bubles y sin vértices aislados que pueden construirse con n vértices dados es

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}2^{\binom{n-k}{2}}$$

Sea p_k la propiedad que indica que el vértice k está aislado en un grafo sin bucles entonces el número de grafos sin bucles ni vértices aislados viene dado por

$$N(p_1'p_2'p_3'\ldots p_n') = N - \sum_{1\le k\le n} N(p_k) + \sum_{1\le j\le k\le n} N(p_jp_k) + \cdots + (-1)^n N(p_1p_2\ldots p_n)$$

donde $N = 2^{\binom{n}{2}}$ el número total de grafos sin bucles que se pueden formar a partir de n vértices.

El número de grafos que se pueden formar a partir de n vértices es $2^{\binom{n}{2}}$. Para aislar k vértices, la primera operación es escojer los k vértices a aislar y la segunda formar los grafos, por princpio fundamental tenemos

$$\sum N(p_1 p_2 \dots p_k) = \binom{n}{k} 2^{\binom{n-k}{2}}$$

para $k = [1 \dots n]$.

Reemplazando en la expersión orignal tenemos

$$\begin{aligned} N(p'_1 p'_2 \dots p'_n) &= \binom{n}{0} 2^{\binom{n}{2}} - \binom{n}{1} 2^{\binom{n-1}{2}} + \binom{n}{2} 2^{\binom{n-2}{2}} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 2^{\binom{n-n}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{\binom{n-k}{2}} \end{aligned}$$

5. De cuántas formas pueden colocarse ocho torres en un tablero de ajedrez fuera de la diagonal principal y sin que puedan atacarse.

   Sean las ocho torres $t, t \in [1 \dots 8]$ y numeramos las filas $f_t \in [1 \dots 8]$ y las columnas $c_t \in [1 \dots 8]$, así a cada torre t le corresponde un par (f_t, c_t) y la solución del problema es un conjunto de ocho pares ordenados.

   Una torre puede atacar su adversario si se encuentra en la misma fila o columna, por lo tanto ninguna torre puede compartir la misma fila o columna, esto es $(\forall (f_j, c_j), (f_k, c_k))(j \neq k \Rightarrow f_j \neq f_k \wedge c_j \neq c_k)$.

   Cada torre debe ir en una fila distinta con lo que garantizamos que $(\forall f_j, f_k)(j \neq k \Rightarrow f_j \neq f_k)$. Esto se puede hacer de una sola manera pues las torres son indistinguibles entre si antes de disponerse en el tablero.

   Una vez dispuestas las torres una en cada fila, resta distribuirlas en columnas distintas. El número total del formas que se pueden disponer las torres en las columnas sin repetir columnas es igual al número de órdenes lineales de un conjunto de 8 elementos, esto es $N = 8!$

   Sea p_k la propiedad que determina si hay una torre en la k diagonal k con $k = [1 \dots 8]$. Entonces $N(p'_1 \dots p'_8)$ cuenta el número de maneras de distribuir ocho torres en el tablero fuera de la diagonal sin que se ataquen como sigue

$$\begin{aligned} N &= 8! \\ N(p_k) &= 7! \Rightarrow \sum N(p_k) = \binom{8}{1} 7! \\ N(p_j p_k) &= 6! \Rightarrow \sum N(p_j p_k) = \binom{8}{2} 6! \\ &\vdots \\ N(p_1 \dots p_8) &= \binom{8}{8} 1! \end{aligned}$$

   Entonces

$$\begin{aligned}
N(p'_1 \dots p'_8) &= \sum_{k=0}^{8} (-1)^k \binom{8}{k}(8-k)! = 8! \sum_{k=0}^{8} \frac{(-1)^k}{k!} = 8! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{8!}\right] \\
&= d_8 \approx 8! e^{-1}
\end{aligned}$$

6. Cuántas soluciones en enteros positivos tiene el siguiente sistema

$$\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 : 1 \leq x_k \leq 6 \wedge 1 \leq k \leq 4\}$$

No se debe cumplir que $x \geq 7$, entonces sea $p_k \equiv x_k \geq 7$. Contamos utilizando composiciones fuertes y asegurando que la propiedad se cumpla como sigue. Sea $y_k = x_k - 6$, entonces garantizamos que se cumple p_k y contamos todas las posibilidades como sigue

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
p_1 & = & C_4(14) & \equiv & \underbrace{x_1 - 6}_{y_1} & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 20-6 \\
p_2 & = & C_4(14) & \equiv & x_1 & + & \underbrace{x_2 - 6}_{y_2} & + & x_3 & + & x_4 & = & 20-6 \\
p_3 & = & C_4(14) & \equiv & x_1 & + & x_2 & + & \underbrace{x_3 - 6}_{y_3} & + & x_4 & = & 20-6 \\
p_4 & = & C_4(14) & \equiv & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \underbrace{x_4 - 6}_{y_4} & = & 20-6
\end{array}$$

Por lo que $\sum N(p_k) = 4C_4(14)$. Similarmente $N(p_j p_k) = C_4(8)$, $N(p_i p_j p_k) = C_4(2) = 0, N(p_1 p_2 p_3 p_4) = C_4(-4) = 0$. Así obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum N(p_k) &= 4C_4(14) \\
\sum N(p_j p_k) &= \binom{4}{2} C_4(8) \\
\sum N(p_i p_j p_k) &= 0 \\
N(p_1 p_2 p_3 p_4) &= 0
\end{aligned}$$

Sustituyendo

$$N(p'_1 p'_2 p'_3 p'_4) = C_4(20) - 4C_4(14) + \binom{4}{2} C_4(8) - 0 + 0$$

7. Recurrencias: Planteamiento, Método de Sumas y Ecuación Característica

1. Halle una recurrencia que cuente el el número de maneras de llenar un repositorio de tamaño $2 \times n$ con piezas de tamaño 1×2.

   Sea a_n el número de maneras en que puedo llenar un repostiorio de tamanò $2 \times n$ con piezas de tamaño 1×2. Procedemos a clasificar las soluciones en dos conjuntos disjuntos como muestra la figura 1. En el primer caso se procede a colocar una pieza en posicion vertical y el problema restante es llenar un contenedor de tamaño $2 \times (n-1)$ con piezas de tamaõ 1×2. En el segundo caso colocamos dos piezas en posición horizontal y el problema restante es llenar un contenedor de tamaño $2 \times (n-2)$ con piezas de tamaño 1×2. Finalmente tenemos que

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + a_{n-2}, \;\; n > 2 \\
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 2
\end{aligned}
$$

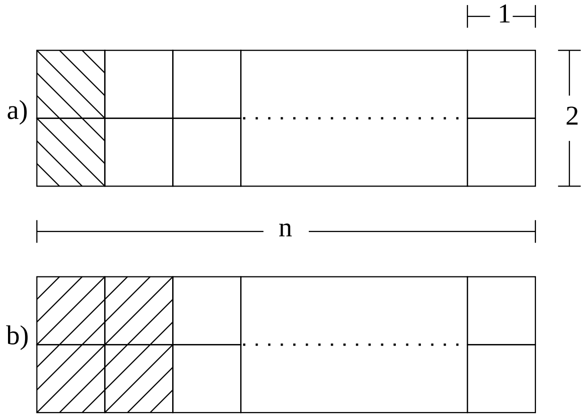

Figura 1: Casos de colocación de objetos dentro del repositorio.

2. Halle una recurrencia que cuente a_n el número de secuencias de longitud n en el alfabeto $\{0, 1, 2\}$ que tienen un número par de ceros.

   Considerando que una secuencia sin ceros contiene un número par de ceros, procedemos a clasificar en tres conjuntos disjuntos como sigue:

   a) El conjunto de secuencias que empiezan con 1 y contienen un número par de ceros en las $n-1$ posiciones restantes. La cardinalidad de este conjunto es igual a a_{n-1}.
   b) El conjunto de secuencias que empiezan con 2 y contienen un número par de ceros en las $n-1$ posiciones restantes. La cardinalidad de este conjunto es igual a a_{n-1}.
   c) El conjunto de secuencias que empiezan con 0 y contienen un número impar de zeros en las $n-1$ posiciones restantes. Si b_n es el número de secuencias de tamaño n con un número impar de ceros, la cardinalidad de este conjunto es b_{n-1}.

   Considernaod que le número total de pa utilizando el hecho que el número total de palabras de longitud $n-1$ en el alfabeto $\{0, 1, 2\}$ es 3^{n-1} e igual a la suma del total de palabras con un número par e impar de ceros $a_{n-1} + b_{n-1}$, entonces tenemos el siguiente sistema

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} \\
3^{n-1} &= a_{n-1} + b_{n-1}
\end{aligned}
$$

   el cual al despejar a_n resulta en

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 3_{n-1}, \;\; n > 2 \\
a_1 &= 2
\end{aligned}
$$

3. Halle una recurrencia que cuente el número de regiones en que n óvalos dividen el plano si cada óvalo intersecta a cada uno de los otros en exactamente dos puntos ningun grupo de tres óvalos se encuentra en el mismo punto [3, pag. 59].

   La siguiente solución se encuentra en [3, pag. 59–60].

   Sea a_n el número de regiones en que n óvalos dividen el plano de acuerdo a las condiciones impuestas en el problema. En la figura 2 podemos observar que por construcción $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$ y $a_4 = 14$.

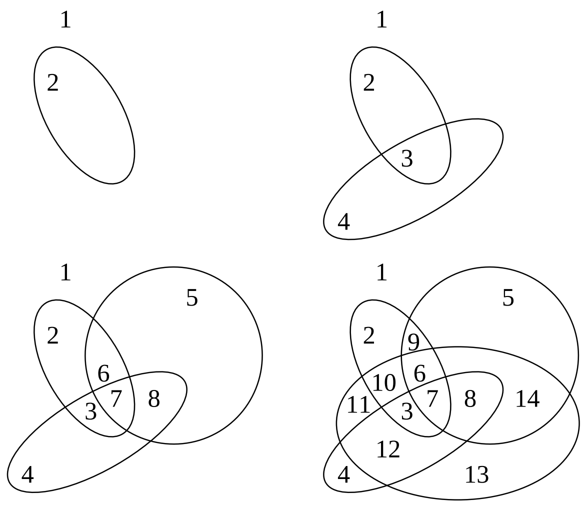

Figura 2: Ejemplo de construcción para 1, 2, 3 y 4 óvalos.

   Suponemos que dibujamos $n-1$ óvalos que dividen al plano en a_{n-1} regiones. Dado que cada óvalo divide a todos los demás en dos puntos, el n-ésimo óvalo corta a los $n-1$ anteriones en $2(n-1)$ puntos. Esos $2(n-1)$ puntos dividen al n-ésimo óvalo en $2(n-1)$ arcos. Cada uno de los $2(n-1)$ arcos definen una frontera de una nueva región. Por lo tanto

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2(n-1), \ n > 1 \\ a_1 &= 2 \end{aligned}$$

4. Halle una recurrencia que cuente el número de de sequencias binarias que presentan el patrón 010 en la n-ésima posición [3, ejemplo 3-10].

   La siguiente solución se encuentra en [3, pag. 76].

   Sea a_n el número de dichas secuencias. Dentro de todas las secuencias binarias hay 2^{n-3} que tienen como tres últimos dígitos 010. Estas secuencias se dividen en dos grupos:

   a) Las que presentan el patrón 010 en la n-ésima posición. Estas son a_n.

   b) Aquellas que no presentan el patrón 010 en la n-ésima posición. Estas secuencias deben presentar el patrón 010 en la $(n-2)$-ésima posición, pues esta es la única razón por la cual el patrón 010 en las tres últimas posiciones no se acepta como un patrón válido. Por ejemplo la secuencia $\cdots 101010$. La cardinalidad de este grupo es entonces a_{n-2}.

   Finalmente despejando y estableciendo las condiciones iniciales, tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= 2^{n-3} - a_{n-2},\ n > 2 \\ a_{\{0,1,2\}} &= 0 \end{aligned}$$

5. Resuelva la recurrencia $y_n = a + nb + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k$ con $y_0 = 0$.

   Para al caso $a = b = 1$ esta recurrencia representa el número de comparaciones promedio que realiza el algoritmo Quicksort al ordenar un arreglo de n claves. Siguiendo el mismo procedimiento de resolución presentado en [2, pag. 28–29], tenemos

   Eliminamos la suma multiplicando la expresión por n,

$$\begin{aligned} ny_n &= na + n^2b + 2\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} y_k && \text{(1) multiplicar por } n \\ ny_n &= na + n^2b + 2\textstyle\sum_{k=0}^{n-2} y_k + y_{n-1} && \text{(2) extraer } y_{n-1} \text{ de (1)} \\ (n-1)y_{n-1} &= (n-1)a + (n-1)^2b + 2\textstyle\sum_{k=0}^{n-2} y_k && \text{(3) escribir } y_{n-1} \text{ a partir de (1)} \\ ny_n &= (n+1)y_{n-1} + a + (2n-1)b && \text{(4) haciendo (1) menos (3)} \end{aligned}$$

   Aplicando el factor de sumación [2, pag. 27] identificamos $a_n = n$, $b_n = n+1$ y $c_n = a+(2n-1)b$, por lo tanto $s_n = \frac{2}{n(n+1)}$. Multiplicando la recurrencia por s_n obtenemos

$$\frac{y_n}{n+1} = \frac{y_{n-1}}{n} + \frac{a + (2n-1)b}{n(n+1)}$$

   Haciendo $c_n = \frac{y_n}{n+1}$, $c_0 = 0$ y $c_{n-1} = \frac{y_{n-1}}{n}$ podemos reescribir la expresión anterior como sigue

$$c_n = c_{n-1} + \frac{a + (2n-1)b}{n(n+1)} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a + (2k-1)b}{k(k+1)}$$

   Observando el sumando podemos simplificarlo por fracciones simples como sigue

$$\begin{aligned} \frac{a + 2kb - b}{k(k+1)} &= \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \\ &= \frac{(k+1)A + kB}{k(k+1)} \\ &\Rightarrow (a-b) + 2kb = (k+1)A + kB \\ &\Rightarrow A = a - b,\ B = 3b - a \end{aligned}$$

   La suma c_n se transforma entonces en

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a-b}{k} + \frac{3b-a}{k+1}\right) \\ &= (a-b)H_n + (3b-a)(H_{n+1} - 1) = 2bH_n - \frac{n(3b-a)}{n+1} \end{aligned}$$

Devolviendo el cambio de variable obtenemos

$$y_n = (n+1)c_n = 2b(n+1)H_n - (3b-a)n$$

6. Resuelva la recurrencia $nx_n = (n-1)x_{n-1} + 2^n$ con $x_0 = 1$.

   Transformando la recurrencia mediante un factor de sumación [2, pag. 27] para aplicar el método de sumas tenemos que $a_n = n$, $b_n = n-1$ y $c_n = 2^n$. Por lo tanto el término s_n queda como sigue

$$s_n = s_{n-1}\frac{a_{n-1}}{b_n} = s_1\frac{a_{n-1}an-2\cdots a_0}{b_nb_{n-1}\cdots b_2} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{(n-1)(n-2)\cdots 1} = 1$$

   Ya que $s_1 = 1$ tenemos

$$x_n = \frac{1}{s_na_n}\left(s_1b_1x_0 + \sum_{k=1}^{n} s_kc_k\right) = \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$$

7. Resuelva la recurrencia $nx_n = (n-1)x_{n-1} + 1$ con $x_0 = 1$.

   Aplicando un factor de sumación s_n para simplicar la recurrencia en una suma [2, pag. 27], tenemos que $a_n = 1$, $b_n = n$ y $c_n = 1$. Luego el factor queda como sigue

$$s_n = s_0\frac{\prod_{k=0}^{n-1} a_k}{\prod_{k=1}^{b} b_k} = s_0\frac{1}{n!}$$

   Haciendo $s_0 = 1$ resulta en

$$x_n = \frac{1}{s_na_n}\left(s_1b_1x_0 + \sum_{k=1}^{n} s_kc_k\right) = n!\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n!}\right) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!} = n!e + O\left(\frac{1}{n}\right) \overset{n\to\infty}{=} n!e$$

8. Resuelva la recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ con $a_0 = 7$ y $a_1 = 16$.

   Encontramos y factorizamos la ecuación característica de la recurrencia [3, sec. 3-2] como sigue

$$\alpha^n - 5\alpha^{n-1} + 6\alpha^{n-2} = \alpha^{n-2}(\alpha^2 - 5\alpha + 6)) = \alpha^{n-2}(\alpha-2)(\alpha-3) = 0$$

   Lo anterior nos indica que hay soluciones de la forma $S_n = 2^n$ y $T_n = 3^n$. Considerando la combinación lineal como solución $a_n = \lambda_1S_n + \lambda_2T_n$ y determinando las constantes λ_1 y λ_2 a partir de las condiciones iniciales, establecemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda_1 2^0 + \lambda_2 3^0 = \lambda_1 + \lambda_2 = 7 \\ a_1 &= \lambda_1 2^1 + \lambda_2 3^1 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 16 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 2 \end{aligned}$$

   Dado que la solución homogenea es igual a la total obtenemos

$$a_n = a_n^{(h)} = 5(2^n) + 2(3^n)$$

9. Resuelva la recurrencia de Fibonacci $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ [3, ejemplo 3-1].

   Aqui presentamos la solución que se encuentra en [3, ejemplo 3-1].

   Encontrando y factorizando la ecuación característica correspondiente tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^2 - \alpha - 1 \\ 0 &= (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \\ 0 &= \left(\alpha - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\alpha - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

   Dado que la solución homogenea es igual a la total obtenemos

$$a_n = a_n^{(h)} = \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

   Finalmente calculando las constantes λ_1 y λ_2 a partir de las condiciones iniciales establecemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ a_1 &= \lambda_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \lambda_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

   La expresión definitiva es

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

10. Resuelva la recurrencia $d_n = 4d_{n-1} - 4d_{n-2}$ con $d_0 = d_1 = 1$.

    Escribiendo y factorizando la ecuación característica correspondiente obtenemos

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = (\alpha - 2)^2 = 0$$

    La solución homogenea es igual a la solución total y observando que la raíz tiene multiplicidad 2 tenemos

$$d_n = d_n^{(h)} = \lambda_1(2^n) + \lambda_2(n2^n)$$

    Calculando las constantes λ_1 y λ_2 a partir de la condiciones iniciales establecemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} d_0 &= \lambda_1 2^0 + \lambda_2(0 \cdot 2^0) = \lambda_1 = 1 \\ d_1 &= \lambda_1 2^1 + \lambda_2(1 \cdot 2^1) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

La expresión definitiva es

$$d_n = 2^n - \frac{1}{2}n2^n = 2^n - n2^{n-1}$$

11. Resuelva la recurrencia $x_n - 2x_{n-1} + 2x_{n-2} = 0$ con $x_{\{0,1\}} = 1$.

 Escribiendo y factorizando la ecuación característica correspondiente tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^n - 2\alpha^{n-1} + 2\alpha^{n-2} \\ 0 &= \alpha^{n-2}(\alpha^2 - 2\alpha + 2) \\ 0 &= \alpha^{n-2}(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \end{aligned}$$

 donde las raices diferentes de cero son complejas e iguales a $\alpha_{\{1,2\}} = 1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm\frac{\pi}{4}i}$. Dado que la solución homogenea es igual a la total obtenemos

$$\begin{aligned} x_n &= \lambda_1 \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^n + \lambda_2 \left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^n \\ &= \lambda_1 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{n\pi}{4}i} + \lambda_2 2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n\pi}{4}i} \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \left((\lambda_1 + \lambda_2)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i(\lambda_1 - \lambda_2)\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

 de donde las constantes λ_1 y λ_2 se calculan a partir de las condiciones iniciales como sigue

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ x_1 &= (\lambda_1 + \lambda_2) + i(\lambda_1 - \lambda_2) = 1 + 0i \end{aligned}$$

 De la segunda expresión concluimos que $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, de donde la expresión definitiva queda como sigue

$$x_n = 2^{\frac{n}{2}} cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

12. Resuelva la recurrencia $x_n + x_{n-2} = \sin(\frac{n\pi}{2})$ con $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$.

 La ecuación característica es

$$\alpha^2 + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm i = e^{\pm\frac{\pi}{2}i}$$

 de donde la solución al sistema homogeneo es

$$\begin{aligned} x_n^{(h)} &= \lambda_1 \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^n + \lambda_2 \left(e^{-\frac{\pi}{2}i}\right)^n \\ &= \lambda_1 e^{\frac{n\pi}{2}i} + \lambda_2 e^{-\frac{n\pi}{2}i} \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i(\lambda_1 - \lambda_2)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

 Para hallar la solución particular, consideramos que si $f(n)$ es de la forma

$$f(n) = m^n \left(P_s(n) \cos(n\theta) + Q_t(n) \sin(n\theta) \right)$$

donde me^θ es raíz con multiplicidad ρ, $P_s(n)$ y $Q_t(n)$ son polinomios en n de orden s y t respectivamente, entonces la solución particular es de la forma

$$x_n^{(p)} = m^n n^\rho \left[R_u(n) \cos(An) + T_u(n) \sin(An) \right]$$

donde $R_u(n)$ y $T_u(n)$ son polinomios en n de orden $u = \text{máx}(s,t)$ y A una constante a determinar.

En el caso que nos ocupa $|i| = 1 \Rightarrow m = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $u = s = t = 0$, $\rho = 1$, $R_0(n) = r_0$, $T_0(n) = t_0$ con r_0, t_0 y A constantes a determinar, de donde la solución particular es de la forma

$$x_n^{(p)} = n(r_0 \cos(An) + t_0 \sin(An))$$

Para hallar las constantes r_0, t_0 y A sustituimos en la recurrencia

$$\begin{aligned}
x_n + x_{n-2} = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) & \\
= \quad & n\left[r_0 \cos(An) + t_0 \sin(An)\right] + (n-2)\left[r_0 \cos(A(n-2)) + t_0 \sin(A(n-2))\right] \\
= \quad & n\left[r_0 \cos(An) + t_0 \sin(An) + r_0 \cos(A(n-2)) + t_0 \sin(A(n-2))\right] \\
& -2\left[r_0 \cos(A(n-2)) + t_0 \sin(A(n-2))\right] \\
\overset{P_1,P_2}{=} \quad & n\left[r_0 \cos(An) + t_0 \sin(An) + r_0 \cos(An)\cos(2A) + r_0 \sin(An)\sin(2A)\right. \\
& \left. + t_0 \sin(An)\cos(2A) - t_0 \cos(An)\sin(2A)\right] \\
& -2\left[r_0 \cos(An)\cos(2A) + r_0 \sin(An)\sin(2A) + t_0 \sin(An)\cos(2A) - t_0 \cos(An)\sin(2A)\right] \\
= \quad & n\left[\cos(An)\left[r_0 + r_0\cos(2A) - t_0 \sin(2A)\right] + \sin(An)\left[t_0 + r_0 \sin(2A) + t_0 \cos(2A)\right]\right] \\
& -2\left[\cos(An)\left[r_0 \cos(2A) - t_0 \sin(2A)\right] \sin(An)\left[r_0 \sin(2A) + t_0 \cos(2A)\right]\right] \\
\overset{A=\frac{\pi}{2}}{=} \quad & 2r_0 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2t_o \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
\Rightarrow \quad & r_0 = 0,\ t_0 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
P_1 &\equiv \cos(\theta - \phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi \\
P_2 &\equiv \sin(\theta - \phi) = \sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi
\end{aligned}$$

y se ha fijado $A = \frac{\pi}{2}$. La solución total es entonces

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = (\lambda_1 + \lambda_2)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i(\lambda_1 - \lambda_2)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{n}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Para calcular las constantes λ_1 y λ_2 de la solución homogenea evaluamos las condiciones iniciales estableciendo el siguiente sistema

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\
x_1 &= \frac{1}{2} + i(\lambda_1 - \lambda_2) = 2 + 0i \\
&\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i,\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$x_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3+n}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

8. Función Generatriz

1. Encuentre la expresión cerrada para la recurrencia $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ con $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$ mediante el método de función generatriz [2, pag. 323–326].

   Escribimos la recurrenia para todo n

$$f_n = (f_{n-1} + f_{n-2})[n \geq 2] + f_1[n = 1] + f_0[n = 0]$$

   Escribimos la función generatriz

$$F(z) = \sum_{k\geq 0} f_k z^k = \sum_{k\geq 0}\left[(f_{k-1} + f_{n-2})[n \geq 2] + f_1[n = 1] + f_0[n = 0]\right] z^k$$

   Manipulamos el lado derecho de la función generatriz para obtener factores de $F(z)$ y expresiones cerradas

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \sum k \geq 0 f_{k-1} z^k + \sum_{k\geq 2} f_{k-2} z^k + f_0 z^0 + f_1 z^1 \\
&= z \sum_{k\geq 0} f_{k-1} z^{k-1} + z^2 \sum_{k\geq 2} f_{k-2} z^{k-2} + z \\
&= z \sum_{k\geq 1} f_k z^k + z^2 \sum_{k\geq 0} f_k z^k + z \\
&= z\left(\sum_{k\geq 1} f_k z^k + f_0 - f_0\right) + z^2 F(z) + z \\
&= z\left(\sum_{k\geq 0} f_k z^k - f_0\right) + z^2 F(z) + z \\
&= zF(z) + z^2 F(z) + z
\end{aligned}
$$

   Despejando $F(z)$

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

Expandiendo el lado derecho en fracciones simples

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1-\rho_0 z} - \frac{1}{1-\rho_1 z} \right]$$

donde

$$\rho_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \rho_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Reesrcibiendo como serie de potencias

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{k\geq 0} \rho_0^k z^k - \sum_{k\geq 0} \rho_1^k z^k \right) = \sum_{k\geq 0} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} (\rho_0^k - \rho_1^k) \right] z^k$$

Observando el coeficiente de z^k encontramos la expresión cerrada para f_n. Sustituyendo los valores de ρ_0 y ρ_1 tenemos

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

2. Resuelva la recurrencia mediante función generatriz

$$\begin{aligned} m_n &= 2m_{\frac{n}{2}} + n - 1 \\ m_{\{0,1\}} &= 0 \\ m_2 &= 1 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $n = 2^k$, $k = \log_2 n$ y $a_k = m_{2^k}$ queda

$$\begin{aligned} m_{2^k} &= 2m_{\frac{2^k}{2}} + 2^k - 1 = 2m_{2^{k-1}} + 2^k - 1 \\ a_k &= 2a_{k-1} + 2^k - 1 \\ a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \end{aligned}$$

Escribimos la ecuación de recurrencia completa como sigue

$$a_k = (2a_{k-1} + 2^k - 1)[k \geq 1] + a_0[k = 0]$$

Escribimos la función generatriz como sigue

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{k\geq 0} a_k z^k = \sum_{k\geq 0} (2a_{k-1} + 2^k - 1)[k \geq 1] + a_0[k = 0])z^k \\ &= \sum_{k\geq 0} (2a_{k-1} + 2^k - 1)[k \geq 1] z^k + \sum_{k\geq 0} a_0[k = 0] z^k \end{aligned}$$

Aplicamos las funciones indicatrices y expandiendo las sumas

$$
\begin{aligned}
A(z) &= \sum_{k\geq 1}(2a_{k-1} + 2^k - 1)z^k + \sum_{k\geq 0} a_0[k=0]z^k \\
&= 2\sum_{k\geq 1} a_{k-1}z^k + \sum_{k\geq 1} 2^k z^k - \sum_{k\geq 1} z^k + 0
\end{aligned}
$$

Manipulamos la expresión de forma tal que los índices de las sumas comiencen en 0

$$
\begin{aligned}
A(z) &= 2z\sum_{k\geq 1} a_{k-1}z^{k-1} + \left(\sum_{k\geq 1} 2^k z^k + 1 - 1\right) - \left(\sum_{k\geq 1} z^k + 1 - 1\right) \\
&= 2z\sum_{k\geq 0} a_k z^k + \left(\sum_{k\geq 0} 2^k z^k - 1\right) - \left(\sum_{k\geq 0} z^k - 1\right)
\end{aligned}
$$

Aplicamos propiedades para expresar las suma como formas cerradas, obteniendo una fórmula cerrada para $A(z)$

$$
\begin{aligned}
A(z) &= 2zA(z) + \frac{1}{1-2z} - \frac{1}{1-z} \\
(1-2z)A(z) &= \frac{1}{1-2z} - \frac{1}{1-z} \\
A(z) &= \frac{1}{(1-2z)^2} - \frac{1}{(1-z)(1-2z)}
\end{aligned}
$$

Aplicamos fracciones simples al segundo término y reescribimos las fórmulas cerradas en forma de función generatriz (sumas)

$$
\begin{aligned}
A(z) &= \frac{1}{(1-2z)^2} + \frac{1}{1-z} - \frac{2}{1-2z} \\
&= \sum_{k\geq 0} \binom{2+k-1}{k} 2^k z^k + \sum_{k\geq 0} z^k - 2\sum_{k\geq 0} 2^k z^k
\end{aligned}
$$

Simplificamos el coeficiente binomial aplicando simetría y reagrupamos los términos en z^k

$$
\begin{aligned}
A(z) &= \sum_{k\geq 0} \left((k+1)2^k + 1 - 2(2^k)\right) z^k \\
&= \sum_{k\geq 0} \left((k-1)2^k + 1\right) z^k
\end{aligned}
$$

El coeficiente de z^k es la fórmula cerrada de a_k

$$a_k = (k-1)2^k + 1$$

Devolvemos el cambio de variables y finalmente encontramos la expresión cerrada para m_n

$$\begin{aligned} m_{2^k} &= (k-1)2^k + 1 \\ m_n &= (\log_2 n - 1)n + 1 \\ m_n &= n \log_2 n - n + 1 \end{aligned}$$

3. Resuelva el sistema de recurrencias mediante función generatriz [2, pag. 329–330].

$$\begin{aligned} x_n &= 2y_{n-1} + x_{n-2},\ x_0 = 1,\ x_1 = 0 \\ y_n &= x_{n-1} + y_{n-2},\ y_0 = 0,\ y_1 = 1 \end{aligned}$$

La solución en [2, pag. 329–330] resuelve el problema sin hayar la expansión completa de las expresiones cerradas en fracciones simples. Por el contrario, aqui se realiza la expansión completa. La motivación es seguir el esquema de resolución que se ha presentado hasta ahora.

Escribimos la función generatriz

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k\geq 0} x_k z^k = \sum_{k\geq 0} \Big[(2y_{k-1} + x_{k-2})[k \geq 2] + x_1[k=1] + x_0[k=0]\Big] z^k \\ Y(z) &= \sum_{k\geq 0} y_k z^k = \sum_{k\geq 0} \Big[(x_{k-1} + y_{k-2})[k \geq 2] + y_1[k=1] + y_0[k=0]\Big] z^k \end{aligned}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales y aplicando las indicatrices al dominio de la suma

$$\begin{aligned} X(z) &= 2\sum_{k\geq 2} y_{k-1} z^k + \sum_{k\geq 2} x_{k-2} z^k + 1 \\ Y(z) &= \sum_{k\geq 2} x_{k-1} z^k + \sum_{k\geq 2} y_{k-2} z^k + z \end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned} \sum_{k\geq 2} a_{k-1} z^k &= z \sum_{k\geq 2} a_{k-1} z^{k-1} \\ &\overset{k\to k+1}{=} z \sum_{k\geq 1} a_k z^k = z \sum_{k\geq 1} a_k z^k + z a_0 - z a_0 = z \sum_{k\geq 0} a_k z^k - a_0 z = zA(z) - a_0 z \end{aligned}$$

y que

$$\sum_{k\geq 2} a_{k-2} z^k = z^2 \sum_{k\geq 2} a_{k-2} z^{k-2} = z^2 \sum_{k\geq 0} a_k z^k = z^2 A(z)$$

podemos reescribir las expresiones anteriores como sigue

$$
\begin{aligned}
X(z) &= 2(zY(z) - y_0 z) + z^2 X(z) + 1 = 2zY(z) + z^2 X(z) + 1 \\
Y(z) &= zX(z) - x_0 z + z^2 Y(z) + z = zX(z) + z^2 Y(z)
\end{aligned}
$$

De la segunda expresión podemos despejar $X(z)$

$$X(z) = \frac{1 - z^2}{z} Y(z)$$

Sustituyendo en la primera expresión tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1 - z^2}{z} Y(z) &= 2zY(z) + z^2 \frac{1 - z^2}{z} Y(z) + 1 \\
(1 - z^2) Y(z) &= 2z^2 Y(z) + z^2 (1 - z^2) Y(z) + z
\end{aligned}
$$

Agrupando $Y(z)$ obtenemos una expresión cerrada para $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{z}{1 - 4z^2 + z^4}$$

y de forma similar obtenemos una expresión para $X(z)$

$$X(z) = \frac{1 - z^2}{z} Y(z) = \frac{1 - z^2}{z} \frac{z}{1 - 4z^2 + z^4} = \frac{1 - z^2}{1 - 4z^2 + z^4}$$

Expandiendo $X(z)$ y $Y(z)$ en fracciones simples obtenemos

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \frac{3 + \sqrt{3}}{12} \left(\frac{1}{1 - \rho_0 z} + \frac{1}{1 + \rho_0 z} \right) + \frac{3 - \sqrt{3}}{12} \left(\frac{1}{1 - \rho_1 z} + \frac{1}{1 + \rho_1 z} \right) \\
Y(z) &= \frac{\sqrt{3}}{12} \left[\rho_0 \left(\frac{1}{1 - \rho_0 z} - \frac{1}{1 + \rho_0 z} \right) - \rho_1 \left(\frac{1}{1 - \rho_1 z} - \frac{1}{1 + \rho_0 z} \right) \right]
\end{aligned}
$$

donde

$$\rho_0 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \quad \rho_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Reescribiendo las expresiones cerradas como series de potencias para $X(z)$

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \frac{3 + \sqrt{3}}{12} \left(\sum_{k \geq 0} \rho_0^k z^k + \sum_{k \geq 0} (-\rho_0)^k z^k \right) + \frac{3 - \sqrt{3}}{12} \left(\sum_{k \geq 0} \rho_1^k z^k + \sum_{k \geq 0} (-\rho_1)^k z^k \right) \\
&= \sum_{k \geq 0} \left[\frac{3 + \sqrt{3}}{12} (1 + (-1)^k) \rho_0^k + \frac{3 - \sqrt{3}}{12} (1 + (-1)^k) \rho_1^k \right] z^k
\end{aligned}
$$

y para $Y(z)$

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{\sqrt{3}}{12}\left[\rho_0\left(\sum_{k\geq 0}\rho_0^k z^k - \sum_{k\geq 0}(-\rho_0)^k z^k\right) - \rho_1\left(\sum_{k\geq 0}\rho_1 z^k - \sum_{k\geq 0}(-\rho_1)^k z^k\right)\right] \\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{\sqrt{3}}{12}\left[(1-(-1)^k)\rho_0^{k+1} - (1-(-1)^k)\rho_1^{k+1}\right] z^k
\end{aligned}$$

Por lo tanto las expresiones cerradas para x_n y y_n son

$$\begin{aligned}
x_n &= (1+(-1)^n)\left(\frac{3+\sqrt{3}}{12}\rho_0^n + \frac{3-\sqrt{3}}{12}\rho_1^n\right) \\
y_n &= (1-(-1)^n)\frac{\sqrt{3}}{12}\left(\rho_0^{k+1} - \rho_1^{k+1}\right)
\end{aligned}$$

Observando que $x_n = 0$ para n impar y que $y_n = 0$ para n par y sustituyendo los valores de ρ_0 y ρ_1, finalmente tenemos

$$\begin{aligned}
x_{2n} &= \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n \\
y_{2n+1} &= \frac{\sqrt{3}}{6}\left[(2+\sqrt{3})^{n+1} + (2-\sqrt{3})^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

A. Evaluación Parcial I

1. Un grafo $G = (V, E)$ no dirigido consiste en un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas $E \subseteq \{\{i,j\} : i,j \in V, i \neq j\}$. Un camino en G es una secuencia $(i_1, \ldots, i_n)$ de vértices tales que $\{i_k, i_{k+1}\} \in E$ para todo $1 \leq k < n$. El grafo es conexo si para todo $i, j \in V$, existe un camino $(i = i_1, \ldots, i_n = j)$ en G. Un vértice i es aislado en G si no existe arista $\{i, j\}$ para algún j. El grafo es d-regular si $|\{j \in V : \{i,j\} \in E\}| = d$.

   (a) Cuántas aristas tiene un grafo d-regular?
   (b) Cuántos grafos $G = ([n], E)$ existen?
   (c) Cuántos grafos $G = ([n], E)$ donde los vértices $\{1, \ldots, k\}$ son aislados?

   (a) $d|V|/2$. Para (b), observe que cada grafo puede verse como un subconjunto de aristas del total de $\binom{n}{2}$ aristas. Así, el número de grafos es $2^{\binom{n}{2}}$. Para (c), observe que los grafos a contar pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los grafos sobre $\{k+1, \ldots, n\}$. Así, la respuesta es $2^{\binom{n-k}{2}}$.

2. Selección de Objetos

   (a) Se tienen $2n$ objetos de los cuales n son idénticos, y los restantes n son distintos. Cuántas maneras de seleccionar n de los $2n$ objetos hay?
   (b) Suponga ahora que son $3n+1$ objetos de los cuales n son idénticos. Cuántas maneras de seleccionar n objetos hay?

En ambos casos obtenga fórmulas cerradas.

Sólo existe una forma de seleccionar k de los n objetos idénticos. Particione el conjunto de selecciones en aquellos que tienen k objetos distintos y $n-k$ objetos iguales. Cada bloque de esta partición tiene tamaño $\binom{n}{k}$. Así, la respuesta para (a) es

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \;=\; 2^n$$

Para (b). Use el mismo argumento para obtener la expresión:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \;=\; \frac{2^{2n+1}}{2} \;=\; 2^{2n}$$

3. Palabras Ternarias

(a) El número de palabras de longitud n sobre $\{0,1,2\}$ con un número par de 0's es $(3^n+1)/2$. Concluya que

$$\binom{n}{0}2^n + \binom{n}{2}2^{n-2} + \binom{n}{4}2^{n-4} + \cdots + \binom{n}{q}2^{n-q} \;=\; \frac{3^n+1}{2}$$

donde q es n ó $n-1$ dependiendo si n es par o impar.

Particione las palabras con un número par de 0's en aquellas con cero 0's, con 2 0's, con 4 0's, hasta aquellas con q 0's. El número de palabras con k 0's es igual a $\binom{n}{k}2^{n-k}$. Justifique la suma con el principio de adición.

4. Cálculo de Sumas

(a) Muestre:

$$n! + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)! \;=\; d_n + d_{n-1} \tag{1}$$

donde

$$d_n \;=\; n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\,.$$

(Recuerde que $0! = 1$.) *Extra:* Concluya de (1) que para todo n grande:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)! \;<\; 0$$

(b) Calcule:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-5k+6}{k(k-3)(k^2-k-2)}$$

(a)

$$\begin{aligned}
n! + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)! \\
&= n! + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! \ - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}(n-k)! \\
&= n! + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k n!}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k(n-1)!}{(k-1)!} \\
&= n! + n!\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} - 1 - (-1)^n/n!\right] + (n-1)!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!} \\
&= n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} - (-1)^n + (n-1)!\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!} - (-1)^{n-1}/(n-1)!\right] \\
&= d_n - (-1)^n + d_{n-1} - (-1)^{n-1} \ = \ \boxed{d_n + d_{n-1}} \\
&\approx n!/e + (n-1)!/e \ = \ n!\frac{n+1}{en} \ < \ n! \ \text{ (para } n \text{ grande)}
\end{aligned}$$

Entonces, la sumatoria en (1) tiene que ser menor a cero. De hecho, se puede mostrar que esto es cierto para todo n, no sólo para n grande.

Para (b),

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-5k+6}{k(k-3)(k^2-k-2)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(k-2)(k-3)}{k(k-3)(k+1)(k-2))} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \\
&= H_n - (H_{n+1} - 1) \ = \ 1 - 1/(n+1) \ = \ \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

5. Más Grafos

De una fórmula para el número de grafos $G = ([n], E)$ sin vértices aislados. *Ayuda:* use el principio de inclusión y exclusión con las propiedades p_i, $1 \leq i \leq n$, donde

$$N(p_i) \ = \ [\text{número de grafos donde el vértice } i \text{ está aislado}]\,.$$

Se le pide calcular $N(p'_1 p'_2 \cdots p'_n)$.

Observe que $N(p_{i_1} \cdot p_{i_k}) = 2^{\binom{n-k}{2}}$ ya que esto cuenta el número de grafos donde $\{i_1, \ldots, i_k\}$ son v ertices aislados (ver 1.(c)). Use ahora el principio de inclusión y exclusión para obtener:

$$N(p'_1 p'_2 \cdots p'_n) \ = \ 2^{\binom{n}{2}} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}2^{\binom{n-k}{2}} \ = \ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}2^{\binom{n-k}{2}}$$

B. Quiz I

1. (2 ptos) Hay cuatro automóviles y seis puestos de estacionamiento. De cuántas formas se pueden estacionar los autos?

2. (3 ptos) Contar el conjunto

$$\left\{f \in [m]^{[n]} : (\forall i, j \in [n])\,(i < j \Rightarrow f(i) < f(j))\right\}$$

3. (2.5 ptos) Cuántas secuencias de longitud n sobre el alfabeto $\{0, 1, 2\}$ contienen al menos k ceros? (2.5 ptos) Cuántas contienen exactamente k ceros?

4. (2 ptos) De cuántas formas pueden ordenarse linearmente las letras de la palabra AABBBBC-CC?

5. (3 ptos) Sean $n, k \in N$ fijos. Contar el conjunto

$$\{(A_1, A_2, \ldots, A_k) : (\forall i \in [k])(A_i \subseteq [n]) \wedge (\forall i \neq j)(A_i \cap A_j = \emptyset)\}$$

6. (2.5 ptos) De cuántas maneras se pueden izar n banderas distinguibles en k astas distinguibles. (2.5 ptos) De cuántas formas se puede hacer si se agrega la condición que toda asta debe tener al menos una bandera.

C. Quiz II

1. Halle una recurrencia t_n que cuente el número de comparaciones ($<$) entre claves que hace el algoritmo de búsqueda en un árbol binario `binary_tree_search` al buscar una clave `k` en una árbol binario `t` de n claves. El árbol `t` está balanceado, esto es para todo nodo el número de nodos en el sub-árbol izquierdo es igual al número de nodos en el sub-árbol derecho ± 1. Las construcciones `t.left` y `t.right` retornan el sub-árbol izquierdo y derecho respectivamente. La construcción `t.key` retorna el valor de la clave del nodo actual. El siguiente pseudo-código muestra el algoritmo. (5 puntos).

```
// binary_tree_search: busca la clave k en el arbol binario t
//   mediante busqueda binaria.
binary_tree_search(t, k) {
  // Si el nodo esta vacio o encontre la clave, retornar el nodo.
  if ((t == NULL) or (k == t.key))
    return t
  // Si la clave es menor que la del nodo, buscar en el sub-arbol izquierdo.
  if (k < t.key)
    return binary_tree_search(t.left, k)
  else // Sino buscar en el sub-arbol derecho.
    return binary_tree_search(t.right, k)
}
```

2. Halle una recurrencia a_n que cuente el número de secuencias de longitud n en el alfabeto $\{0, 1, 2\}$ que tienen un número par de ceros (5 puntos).

3. Halle una recurrencia m_n que cuente el número de comparaciones entre elementos de una lista de tamaño n que realiza el algoritmo de ordenamiento por mezcla `merge_sort` al ordenarla. El siguiente pseudo-código muestra el algoritmo. La rutina de mezcla `merge` retorna una lista ordenada mezclando las dos sub-listas ordenadas de tamaño $\frac{n}{2}$ que recibe como parámetros, haciendo $n-1$ comparaciones en el proceso (5 puntos).

```
// merge_sort: ordena la lista lst mediante ordenamiento por mezcla.
merge_sort(lst) {
  // Si hay dos o mas elementos en la lista.
  if (nelem(lst) > 1) {
    // Partir en dos mitades la lista: lado izquierdo (lhs) y lado derecho (rhs).
    split(lst, lhs, rhs)
    // Retornar la mezcla ordenada de las dos sub-listas ordenadas.
    return merge(merge_sort(lhs), merge_sort(rhs))
  } else // Sino retornar la lista.
    return lst
}
```

4. Halle una recurrencia a_n que cuente el número de maneras de llenar un repositorio de tamaño $2 \times n$ con piezas de tamaño 1×2 (5 puntos).

Referencias

[1] V. Yriarte. Elementos de teoría combinatoria. Technical report, U.S.B, 1996. http://-www.ldc.usb.ve/ meza/ci-7521/guiaestdisc.ps.

[2] R. L Graham, D. E Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics: a foundation for computer science*. Addison-Wesley, third edition, May 1989.

[3] C. L. Liu. *Introduction to Combinatorial Mathematics*. MacGraw-Hill, Inc., New York, 1968.